Strongly relatively nonexpansive写像について (非線形解析学と凸解析学の研究)

AUTHOR(S):

高阪, 史明

数理解析研究所講究録
第 1755 巻 2011 年 30-37

Strongly relatively nonexpansive 写像について
(On strongly relatively nonexpansive mappings)

大分大学工学部 高阪 史明 (Kohsaka, Fumiaki)*
Department of Computer Science and Intelligent Systems,
Oita University

概要

Strongly relatively nonexpansive 写像と写像の合成や双対写像に基づく凸結合との関係について議論する.

1 はじめに

Strongly relatively nonexpansive 写像は, 非線形問題の解の近似法を研究する際に本質的な役割をする. この写像概念は, ヒルベルト空間における空でない閉凸集合上への距離射影や, より一般に, 零点を持つ極大単調作用素のリゾルベントが有する性質を抽象化したものである. 本稿では, 与えられた複数の写像から strongly relatively nonexpansive 写像を構成する方法について議論する.

C を滑らかなバナッハ空間 E の空でない部分集合とし, $\phi\colon E \times E \to \mathbb{R}$ を

$$\phi(u,v) = \|u\|^2 - 2\langle u, Jv\rangle + \|v\|^2 \quad (\forall u, v \in E) \tag{1.1}$$

で定まる関数とする. ここで, $J\colon E \to E^*$ は双対写像である. 写像 $S\colon C \to E$ に対し, その不動点全体の集合を $F(S)$ で表す. また, $u \in C$ が S の漸近的不動点 [13] であるとは, ある C の点列 $\{z_n\}$ で $z_n \rightharpoonup u$ かつ $z_n - Sz_n \to 0$ を満たすものが存在することを言う. S の漸近的不動点全体の集合を $\hat{F}(S)$ で表す. 写像 $S\colon C \to E$ が strongly relatively nonexpansive であるとは, 次の四条件が成り立つことを言う.

(S1) $F(S)$ が空でない.

* 大分大学 工学部 知能情報システム工学科; 〒870-1192 大分市旦野原 700; email: f-kohsaka@oita-u.ac.jp

(S2) 任意の $u \in F(S)$ と $x \in C$ に対して, $\phi(u, Sx) \leq \phi(u, x)$ が成り立つ.
(S3) $\widehat{F}(S) = F(S)$ が成り立つ.
(S4) $\{z_n\}$ が C の有界点列で $\phi(u, z_n) - \phi(u, Sz_n) \to 0$ がある $u \in F(S)$ に対して成り立つとき, $\phi(Sz_n, z_n) \to 0$ となる.

Strongly relatively nonexpansive 写像は次の好ましい性質を持つ. これは, 本質的には Reich [13] によるものである. 文献 [2] におけるより一般的な結果も参照すると良い.

定理 1.1. C を滑らかな一様凸バナッハ空間 E の空でない閉凸集合とする. $S\colon C \to C$ を strongly relatively nonexpansive 写像とし, $x \in C$ とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $\{S^n x\}$ は有界であり, その任意の弱収束部分列の極限は $F(S)$ に属する.
(2) J が点列的に弱連続であれば, $\{S^n x\}$ は $F(S)$ の点に弱収束する.

従って, 種々の非線形問題の解の近似法を議論する際, ある strongly relatively nonexpansive 写像 S でその不動点集合が考えている問題の解集合と一致するものを構成できれば, 定理 1.1 の系として問題の解への収束定理を得ることができるのである.

2 準備

本稿では実数空間 $\mathbb{R}$ 上の線形空間を取り扱う. $\mathbb{N}$ で正の整数全体の集合を表す. バナッハ空間 E の共役空間を E^* で表す. 点 $x \in E$ のノルムを $\|x\|$ で表す. $x^* \in E^*$ の $x \in E$ における値 $x^*(x)$ を $\langle x, x^* \rangle$ で表す. E の点列 $\{x_n\}$ が x に強収束すること及び弱収束することを, それぞれ $x_n \to x$ 及び $x_n \rightharpoonup x$ で表す. E から E^* への双対写像 J は

$$Jx = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\} \quad (\forall x \in E)$$

により定義される. E が滑らかであるとき, J は一価写像となる. E が滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間であるとき, $J\colon E \to E^*$ は全単射となり, J^{-1} は E^* から E への双対写像と一致する. E が滑らかであるとき, J が点列的に弱連続であるとは, $\{x_n\}$ が E の点列で $x_n \rightharpoonup x \in E$ となるとき, $\{Jx_n\}$ が Jx に汎弱収束することを言う. バナッハ空間の幾何学に関する基本的な用語については [6, 14, 15] に従う. 次の補題は重要である.

補題 2.1 ([7]). $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ を滑らかな一様凸バナッハ空間 E の点列で $\phi(x_n, y_n) \to 0$ を満たすものとする. また, $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ の少なくともどちらか一方が有界であるとする. このとき, $\|x_n - y_n\| \to 0$ となる.

ここで, 定理 1.1 の証明を与える.

定理 1.1 の証明. $S(C) \subset C$ であるから, C の点列 $\{S^n x\}$ が定義される. まず, (1) を示す. (S1) より点 $u \in F(S)$ をとることができる. (S2) より $\phi(u, S^{n+1}x) \leq \phi(u, S^n x)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) が成り立つ. これより, $\lim_n \phi(u, S^n x)$ が存在すること及び $\{S^n x\}$ が有界であることが分かる. また, $\phi(u, S^n x) - \phi\big(u, S(S^n x)\big) \to 0$ と (S4) から $\phi\big(S(S^n x), S^n x\big) \to 0$ を得る. 補題 2.1 により

$$\lim_{n\to\infty} \|S(S^n x) - S^n x\| = 0 \tag{2.1}$$

が従う. ここで, $\{S^{n_i} x\}$ を $\{S^n x\}$ の部分列で v に弱収束するものとすると, C が弱閉であるため $v \in C$ となる. さらに, (2.1) から $v \in \widehat{F}(S)$ となり, (S3) より $v \in F(S)$ を得る.

次に, (2) を示す. J が点列的に弱連続であることを仮定する. E は一様凸であるので回帰的である. よって, 有界点列 $\{S^n x\}$ は弱収束する部分列を持つ. そのような部分列の極限が一意であることを示せば良い. $\{S^{n_i} x\}$ 及び $\{S^{m_i} x\}$ をそれぞれ $\{S^n x\}$ の部分列で v_1 及び v_2 に弱収束するものとする. このとき, (1) より $v_1, v_2 \in F(S)$ であり, さらに (1) の証明より $\lim_n \phi(v_1, S^n x)$ 及び $\lim_n \phi(v_2, S^n x)$ が存在する. また,

$$\phi(v_1, S^n x) - \phi(v_2, S^n x) = \|v_1\|^2 - \|v_2\|^2 + 2\langle v_2 - v_1, JS^n x\rangle \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるので, $\lim_n \langle v_2 - v_1, JS^n x\rangle$ が存在する. これより

$$\langle v_1 - v_2, Jv_1\rangle = \lim_{i\to\infty} \langle v_1 - v_2, JS^{n_i} x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle v_1 - v_2, JS^n x\rangle = \langle v_1 - v_2, Jv_2\rangle$$

を得る. よって, $\langle v_1 - v_2, Jv_1 - Jv_2\rangle = 0$ を得る. E は一様凸であるので, 狭義凸でもあるから, $v_1 = v_2$ となる. ゆえに, $\{S^n x\}$ は $F(S)$ の点に弱収束する. □

C を滑らかなバナッハ空間 E の空でない部分集合とし, $S\colon C \to E$ とする.

- S が (r) 型であるとは S が (S1) と (S2) を満たすことを言う [3].
- S が (sr) 型であるとは S が (S1), (S2) 及び (S4) を満たすことを言う [3].
- S が relatively nonexpansive であるとは S が (r) 型で (S3) を満たすことを言う [11, 12].
- S が strongly relatively nonexpansive であるとは S が (sr) 型で (S3) を満たすことを言う [3, 4, 9, 13].

C を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間 E の空でない閉凸集合とするとき, 任意の $x \in E$ に対して, ただ一つの $\hat{x} \in C$ が存在し $\phi(\hat{x}, x) = \min_{y\in C} \phi(y, x)$ が成り立

つ [1,7]. $\Pi_C x = \hat{x}$ $(\forall x \in E)$ で定義される $\Pi_C\colon E \to C$ を E から C 上への generalized projection と言う [1]. この射影の不動点集合 $F(\Pi_C)$ は明らかに C と一致する. また, 次の基本的な性質がある [1,7].

$$\phi(u, \Pi_C x) + \phi(\Pi_C x, x) \le \phi(u, x) \quad (\forall u \in C,\, x \in E).$$

これより, Π_C が (sr) 型であることが分かる. また, C が弱閉であることから, $\widehat{F}(\Pi_C) = F(\Pi_C)$ となり, 結局, Π_C が strongly relatively nonexpansive 写像であることが分かる.

E を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間とする. このとき, $A\colon E \to 2^{E^*}$ が単調であるとは $x^* \in Ax$ かつ $y^* \in Ay$ ならば $\langle x-y, x^*-y^* \rangle \ge 0$ が成り立つことを言う. また, 単調作用素 $A\colon E \to 2^{E^*}$ が極大単調であるとは, 単調作用素 $B\colon E \to 2^{E^*}$ でそのグラフが A のグラフを真に含むものが存在しないことを言う. $A\colon E \to 2^{E^*}$ が極大単調作用素であるとき, $S = (J + A)^{-1}J$ で定義される A のリゾルベント $S\colon E \to E$ は一価写像となり, $F(S) = A^{-1}0$ となる. さらに, 次が成り立つ [8].

$$\phi(u, Sx) + \phi(Sx, x) \le \phi(u, x) \quad (\forall u \in A^{-1}0,\, x \in E).$$

よって, $A^{-1}0 \ne \emptyset$ であれば, S は (sr) 型となる. さらに, E のノルムが一様に Gâteaux 微分可能であれば, S は strongly relatively nonexpansive 写像となる [10].

3 合成と凸結合

まず, 写像の合成について得られた結果を述べる.

補題 3.1 ([3]). C と D を滑らかな狭義凸バナッハ空間 E の空でない部分集合とし, $S\colon C \to E$ と $T\colon D \to E$ をそれぞれ (r) 型の写像で $T(D) \subset C$ 及び $F(S) \cap F(T) \ne \emptyset$ を満たすものとする. また, S と T の少なくともどちらか一方が (sr) 型であるとする. このとき, $ST\colon D \to E$ は (r) 型であり, $F(ST) = F(S) \cap F(T)$ が成り立つ. さらに, E が一様凸で, S と T が (sr) 型であれば, ST も (sr) 型となる.

定理 3.2 ([3]). C と D を一様に Gâteaux 微分可能なノルムを持つ一様凸バナッハ空間 E の空でない部分集合とし, $S\colon C \to E$ と $T\colon D \to E$ をそれぞれ relatively nonexpansive 写像で $T(D) \subset C$ 及び $F(S) \cap F(T) \ne \emptyset$ を満たすものとする. また, S と T の少なくともどちらか一方が strongly relatively nonexpansive であるとする. このとき, $ST\colon D \to E$ は relatively nonexpansive であり, $F(ST) = F(S) \cap F(T)$ が成り立つ. さらに, S と T が strongly relatively nonexpansive であれば, ST も strongly relatively nonexpansive となる.

定理 3.2 より次の二つの系を得る.

系 3.3. $\{C_k\}_{k=1}^m$ を一様に Gâteaux 微分可能なノルムを持つ一様凸バナッハ空間 E の空でない閉凸集合族とし, $\bigcap_{k=1}^m C_k \neq \emptyset$ が成り立つとする. このとき, $U = \Pi_{C_1}\Pi_{C_2}\cdots\Pi_{C_m}$ で定義される $U\colon E \to E$ は strongly relatively nonexpansive であり, $F(U) = \bigcap_{k=1}^m C_k$ が成り立つ.

系 3.4. C を一様に Gâteaux 微分可能なノルムを持つ一様凸バナッハ空間 E の空でない閉凸集合とする. $T\colon C \to E$ を relatively nonexpansive 写像とし, $A\colon E \to 2^{E^*}$ を極大単調作用素とする. また, $F(T) \cap A^{-1}0 \neq \emptyset$ が成り立つとする. このとき, $U = T\Pi_C(J+A)^{-1}J$ 及び $V = (J+A)^{-1}JT$ で定義される $U\colon E \to E$ 及び $V\colon C \to E$ は relatively nonexpansive であり, $F(U) = F(V) = F(T) \cap A^{-1}0$ が成り立つ.

証明. 写像 U に関する性質を証明する. 写像 $\Pi_C\colon E \to E$ と $(J+A)^{-1}J\colon E \to E$ は strongly relatively nonexpansive 写像であり,

$$F(\Pi_C) \cap F\big((J+A)^{-1}J\big) = C \cap A^{-1}0 \supset F(T) \cap A^{-1}0 \neq \emptyset$$

が成り立つ. よって, 定理 3.2 により, $\Pi_C(J+A)^{-1}J\colon E \to C$ は strongly relatively nonexpansive 写像となり,

$$F\big(\Pi_C(J+A)^{-1}J\big) = F(\Pi_C) \cap F\big((J+A)^{-1}J\big) = C \cap A^{-1}0$$

が成り立つ. さらに, $T\colon C \to E$ が relatively nonexpansive 写像であること及び

$$F(T) \cap F\big(\Pi_C(J+A)^{-1}J\big) = F(T) \cap C \cap A^{-1}0 = F(T) \cap A^{-1}0 \neq \emptyset$$

に注意し, 定理 3.2 を再び用いると, $U\colon E \to E$ が relatively nonexpansive 写像であり,

$$F(U) = F(T) \cap F\big(\Pi_C(J+A)^{-1}J\big) = F(T) \cap A^{-1}0$$

となることが分かる. V についても同様にして証明できる. □

次に, Censor & Reich [5] の意味での凸結合について得られた結果を述べる.

補題 3.5 ([3]). C を滑らかで狭義凸な回帰的バナッハ空間 E の空でない部分集合とする. $S\colon C \to E$ を (sr) 型の写像とし, $T\colon C \to E$ を (r) 型の写像とする. また, $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$ が成り立つとし, $\lambda \in (0,1)$, $V = J^{-1}(\lambda JS + (1-\lambda)JT)$ とする. このとき, $V\colon C \to E$ は (r) 型であり, $F(V) = F(S) \cap F(T)$ が成り立つ. さらに, E が一様に滑らかでかつ一様凸であれば, V は (sr) 型となる.

定理 3.6 ([3]). C を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間 E の空でない部分集合とする. $S\colon C \to E$ を strongly relatively nonexpansive 写像とし, $T\colon C \to E$ を relatively nonexpansive 写像とする. また, $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$ が成り立つとし, $\lambda \in (0,1)$, $V = J^{-1}(\lambda JS+(1-\lambda)JT)$ とする. このとき, $V\colon C \to E$ は strongly relatively nonexpansive であり, $F(V) = F(S) \cap F(T)$ が成り立つ.

定理 3.6 より次の系を得る.

系 3.7. $\{C_k\}_{k=1}^m$ を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間 E の空でない閉凸集合族とし, $\bigcap_{k=1}^m C_k \neq \emptyset$ が成り立つとする. このとき, $U = J^{-1}\left(\sum_{k=1}^m J\Pi_{C_k}/m\right)$ で定義される $U\colon E \to E$ は strongly relatively nonexpansive であり, $F(U) = \bigcap_{k=1}^m C_k$ が成り立つ.

定理 3.2 と定理 3.6 より次の系を得る.

系 3.8. C を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間 E の空でない閉凸集合とする. $S\colon C \to E$ を strongly relatively nonexpansive 写像とし, $T\colon C \to E$ を relatively nonexpansive 写像とする. また, $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$ が成り立つとする. このとき, $U = \Pi_C J^{-1}\big((JS + JT)/2\big)$ で定義される $U\colon C \to C$ は strongly relatively nonexpansive であり, $F(U) = F(S) \cap F(T)$ が成り立つ.

系 3.9. C を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間 E の空でない閉凸集合とする. $\{T_k\}_{k=1}^m$ を C から E への relatively nonexpansive 写像族とし, $\bigcap_{k=1}^m F(T_k) \neq \emptyset$ が成り立つとする. このとき, $U = \Pi_C J^{-1}\big((J + \sum_{k=1}^m JT_k)/(m+1)\big)$ で定義される $U\colon C \to C$ は strongly relatively nonexpansive であり, $F(U) = \bigcap_{k=1}^m F(T_k)$ が成り立つ.

4 非線形問題の解への収束定理

定理 1.1 と系 3.3 により次の系を得る.

系 4.1. $\{C_k\}_{k=1}^m$ を一様に Gâteaux 微分可能なノルムを持つ一様凸バナッハ空間 E の空でない閉凸集合族とし, $\bigcap_{k=1}^m C_k \neq \emptyset$ が成り立つとする. 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 \in E$,

$$x_{n+1} = \Pi_{C_1}\Pi_{C_2}\cdots\Pi_{C_m}x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

により定義する. このとき, $\{x_n\}$ は有界であり, その任意の弱収束部分列の極限は $\bigcap_{k=1}^m C_k$ に属する. さらに, J が点列的に弱連続であれば $\{x_n\}$ は $\bigcap_{k=1}^m C_k$ の点に弱収束する.

定理 1.1 と系 3.7 により次の系を得る.

系 4.2. $\{C_k\}_{k=1}^m$ を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間 E の空でない閉凸集合族とし, $\bigcap_{k=1}^m C_k \neq \emptyset$ が成り立つとする. 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 \in E$,

$$x_{n+1} = J^{-1}\left(\frac{J\Pi_{C_1} + J\Pi_{C_2} + \cdots + J\Pi_{C_m}}{m}\right)x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

により定義する. このとき, $\{x_n\}$ は有界であり, その任意の弱収束部分列の極限は $\bigcap_{k=1}^m C_k$ に属する. さらに, J が点列的に弱連続であれば $\{x_n\}$ は $\bigcap_{k=1}^m C_k$ の点に弱収束する.

定理 1.1 と系 3.8 により次の系を得ることができる.

系 4.3. C を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間 E の空でない閉凸集合とする. $S\colon C \to E$ を strongly relatively nonexpansive 写像とし, $T\colon C \to E$ を relatively nonexpansive 写像とする. また, $F(S) \cap F(T) \neq \emptyset$ が成り立つとし, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 \in C$,

$$x_{n+1} = \Pi_C J^{-1}\left(\frac{JS + JT}{2}\right)x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

により定義する. このとき, $\{x_n\}$ は有界であり, その任意の弱収束部分列の極限は $F(S) \cap F(T)$ に属する. さらに, J が点列的に弱連続であれば $\{x_n\}$ は $F(S) \cap F(T)$ の点に弱収束する.

系 3.4 と系 4.3 により次の系を得る.

系 4.4. C を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間 E の空でない閉凸集合とする. $T\colon C \to E$ を relatively nonexpansive 写像とし, $A\colon E \to 2^{E^*}$ を極大単調作用素とする. また, $F(T) \cap A^{-1}0 \neq \emptyset$ が成り立つとし, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 \in C$,

$$x_{n+1} = \Pi_C J^{-1}\left(\frac{J + J(J + A)^{-1}JT}{2}\right)x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

により定義する. このとき, $\{x_n\}$ は有界であり, その任意の弱収束部分列の極限は $F(T) \cap A^{-1}0$ に属する. さらに, J が点列的に弱連続であれば $\{x_n\}$ は $F(T) \cap A^{-1}0$ の点に弱収束する.

また, 定理 1.1 と系 3.9 を用いると次の系が得られる.

系 4.5. C を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間 E の空でない閉凸集合とする. $\{T_k\}_{k=1}^m$ を C から E への relatively nonexpansive 写像族とし, $\bigcap_{k=1}^m F(T_k) \neq \emptyset$ が成り立つとす

る. また, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 \in C$,

$$x_{n+1} = \Pi_C J^{-1} \left(\frac{J + JT_1 + JT_2 + \cdots + JT_m}{m+1} \right) x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

により定義する. このとき, $\{x_n\}$ は有界であり, その任意の弱収束部分列の極限は $\bigcap_{k=1}^{m} F(T_k)$ に属する. さらに, J が点列的に弱連続であれば $\{x_n\}$ は $\bigcap_{k=1}^{m} F(T_k)$ の点に弱収束する.

参考文献

[1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 178, Dekker, New York, 1996, pp. 15–50.

[2] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Strongly relatively nonexpansive sequences in Banach spaces and applications*, J. Fixed Point Theory Appl. **5** (2009), 201–224.

[3] ———, *Strong convergence theorems by shrinking and hybrid projection methods for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear analysis and convex analysis, Yokohama Publ., Yokohama, 2009, pp. 7–26.

[4] K. Aoyama and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for a family of relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory **8** (2007), 143–160.

[5] Y. Censor and S. Reich, *Iterations of paracontractions and firmly nonexpansive operators with applications to feasibility and optimization*, Optimization **37** (1996), 323–339.

[6] I. Cioranescu, *Geometry of Banach spaces, duality mappings and nonlinear problems*, Mathematics and its Applications, vol. 62, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1990.

[7] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945.

[8] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Strong convergence of an iterative sequence for maximal monotone operators in a Banach space*, Abstr. Appl. Anal. (2004), 239–249.

[9] ———, *Approximating common fixed points of countable families of strongly nonexpansive mappings*, Nonlinear Stud. **14** (2007), 219–234.

[10] ———, *Existence and approximation of fixed points of firmly nonexpansive-type mappings in Banach spaces*, SIAM J. Optim. **19** (2008), 824–835.

[11] S. Matsushita and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2004), 37–47.

[12] ———, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.

[13] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 178, Dekker, New York, 1996, pp. 313–318.

[14] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[15] ———, *Convex Analysis & Approximation of Fixed Points*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000 (Japanese).